Lieu de centres de similitudes.
Dans le plan affine euclidien, on considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs O et O', et de rayons respectifs R et R' différents.

1) Montrer qu'il existe au moins une similitude directe et au moins une similitude indirecte qui transforme $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.

2) On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des centres des similitudes directes transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un cercle et préciser son centre et son rayon. Trouver une construction de $\mathcal{E}$ à la règle et au compas.

3) Répondre aux mêmes questions qu'au 2) mais en remplaçant similitude directe par similitude indirecte.

Solution :

[0] [usim0011] v1.00 Dany-Jack Mercier (Enoncé similaire mais avec des carrés dans l'exercice 9 du TD11 de M1-Géométrie de Chazarain).

Dans le plan euclidien, on se donne 2 cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ non isométriques.

a) Montrer l'existence d'au moins une similitude directe, et d'au moins une similitude indirecte transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$.

b) Montrer que le lieu $\mathcal{E}$ des centres de toutes les similitudes directes transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Peut-on donner une constr. géom. de $\mathcal{E}$?

c) Même question qu'au b), mais avec des similitudes indirectes

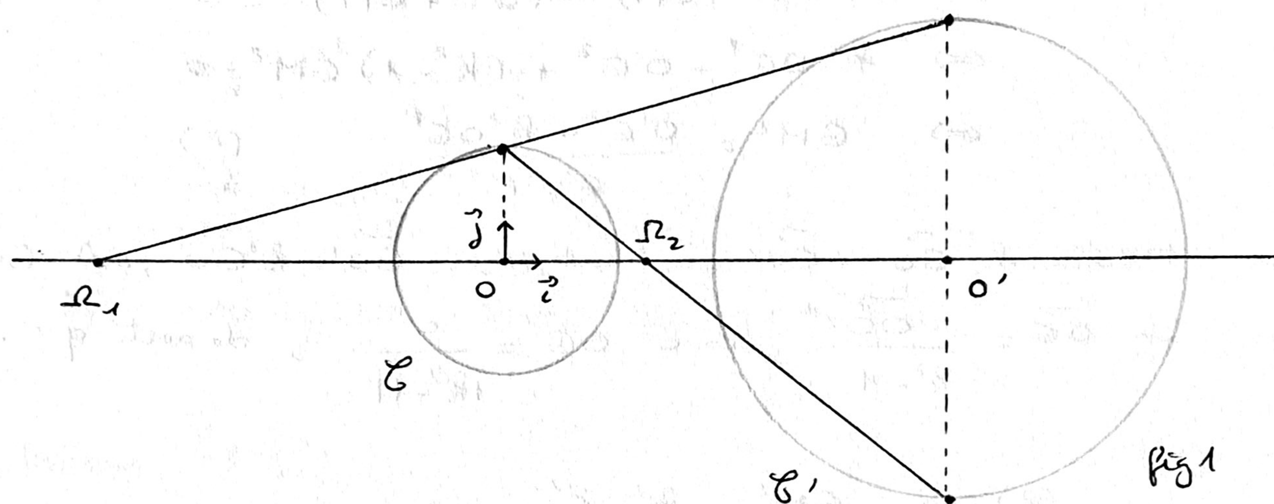


fig 1

a) Choisissons $A \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{C}'$. On sait qu'il existe 1 et 1 seule similitude directe (resp. indirecte) f transformant O et A, resp. en O' et B. Il est alors évident que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ (conservation des rapports)

<u>2e solution</u> : Il y a 2 homothéties h_i $(1 \leq i \leq 2)$ de centres Ω_i dessinés ci-dessus, et transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$. Ce sont des similitudes directes. La composée $f = s \circ h_i$, où s est la réflexion $/_a$ (OO') sera une simil. indirecte transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$. CQFD

b) $f(z) = az + b$ est l'écriture complexe d'une similitude directe transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ ssi $f(0) = c \doteqdot$ affixe de O' et $|a| = k \doteqdot \frac{R'}{R}$ est le rapport des rayons de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$.

Fixons le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la figure ci-dessus, pour parler d'affixe. On a :

(<u>Roche</u> : énoncé similaire mais avec des carrés - cf TD-11 du M1 géométrie de Chajarain, ex9)
L'énoncé ci-dessus est inédit.

$$z \in \mathscr{C} \iff z = k e^{i\theta} z + c \qquad \text{où } k = \frac{R'}{R}, \ \theta \in \mathbb{R}$$

$$\iff e^{i\theta} = \frac{1}{k} \frac{z-c}{z}$$

$$\iff \frac{1}{k} \left| \frac{z-c}{z} \right| = 1$$

$$\iff |z-c| = k|z|$$

$$\iff O'M = k\, OM \iff k^2 OM^2 - O'M^2 = 0 \quad (1)$$

Comme $k \neq 1$, on peut définir le barycentre G de $O(k^2)$, $O'(-1)$, et :

$$(1) \iff k^2 (\vec{OG} + \vec{GM})^2 - (\vec{O'G} + \vec{GM})^2 = 0$$

$$\iff k^2 OG^2 - O'G^2 + (k^2 - 1) GM^2 = 0$$

$$\iff GM^2 = \frac{O'G^2 - k^2 OG^2}{k^2 - 1} \quad (2)$$

Mais $k^2 \vec{GO} - \vec{GO'} = \vec{0}$ entraîne $\vec{GO'} = k^2 \vec{GO}$, soit $GO'^2 = k^4 GO^2$, et $\vec{OG} = \frac{-\vec{OO'}}{k^2 - 1}$, donc $OG = \frac{c}{|k^2 - 1|}$, de sorte que :

$$(2) \iff GM^2 = k^2 OG^2$$

$$\iff GM = \frac{kc}{|k^2 - 1|} \quad (3)$$

Ccl : $\mathscr{C}$ est défini par (3). C'est le cercle de centre $G\begin{pmatrix} \frac{c}{1-k^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon $\frac{kc}{|k^2-1|}$

Construction géométrique : $\mathscr{C}$ est centré sur la droite (OO'), et la fig 1 exhibe 2 centres de sim. dir. transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$, à savoir Ω_1 et Ω_2. Le cercle $\mathscr{C}$ sera donc le cercle de diamètre $[\Omega_1 \Omega_2]$.

~~U26~~

c) Avec le m̂ repère qu'en b), f sera une sim. ind. transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ ssi :

$$\begin{cases} f(z) = a\bar{z} + b \\ f(0) = c \doteq \text{abscisse de } O' \iff b = c \\ |a| = k \doteq \text{rappot } \frac{R'}{R} \text{ des rayons de } \mathcal{C}' \text{ et } \mathcal{C} \end{cases}$$

Notons $\mathcal{E}'$ le lieu cherché.

$$M \in \mathcal{E}' \iff z = k e^{i\theta} \bar{z} + c \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

$$\iff e^{i\theta} = \frac{1}{k\bar{z}}(z - c)$$

$$\iff 1 = \frac{1}{k}\left|\frac{z-c}{\bar{z}}\right|$$

$$\iff |z - c| = k|z| \iff M \in \mathcal{E}.$$

Finalement $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$

CQFD

Constructions géométriques pour composer 2 similitudes planes

(réf. Richard leçon 16)

On sait composer des isométries planes. Comme toute similitude s de rapport $k \neq 1$ s'écrit sous la forme canonique $s = h \circ g = g \circ h$ où h est une homothétie de centre O et de rapport k et g est une isométrie telle que $g(O) = O$, on saura composer 2 similitudes dès que l'on saura :

a) Composer une homothétie et une translation :

Soit $s = h_{O,k} \circ t_{\vec{u}}$. Si $k \neq 1$, $\vec{s} = k\,Id$ montre que s sera une homothétie de rapport k dont il s'agit de déterminer le centre Ω :

$$h_{O,k} \circ t_{\vec{u}}(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega\Omega_1} = \vec{u} \\ \overrightarrow{O\Omega} = k\,\overrightarrow{O\Omega_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{O\Omega} = k(\overrightarrow{O\Omega} + \vec{u}) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{O\Omega} = \frac{k}{1-k}\vec{u}}$$

Le cas $t_{\vec{u}} \circ h_{O,k}$ se traite de la même façon.

b) Composer 2 homothéties :

La partie linéaire de $s = h_{O,k} \circ h_{O',k'}$ est $kk'Id$.

* Si $kk' = 1$, s sera donc une translation de vecteur $\overrightarrow{O'h_{O,k}(O')} = (k-1)\overrightarrow{OO'}$
* Si $kk' \neq 1$, s sera une homothétie de rapport kk' et de centre Ω tel que $\Omega = h_{O,k} \circ \underbrace{h_{O',k'}(\Omega)}_{\Omega_1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{O'\Omega_1} = k'\overrightarrow{O'\Omega} \\ \overrightarrow{O\Omega} = k\,\overrightarrow{O\Omega_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{O\Omega} = k\overrightarrow{OO'} + kk'\overrightarrow{O'\Omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{O\Omega} = \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{OO'}}$$

NB : on constate que si $k \neq k'$, le produit $h_{O,k} \circ h_{O',k'}$ n'est pas commutatif.

c) Composer une homothétie de rapport $k > 0$ et une rotation affine :

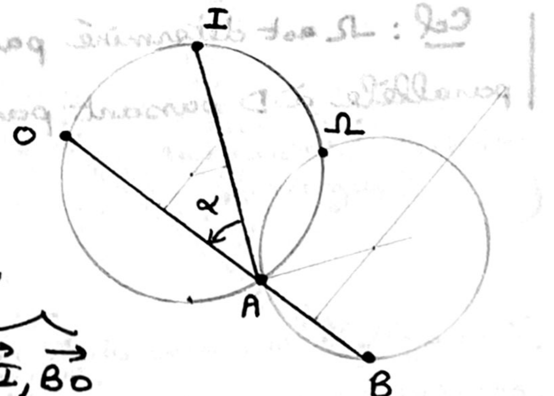
Considérons $s = h_{O,k} \circ r_{A,\alpha}$ (le cas $r_{A,\alpha} \circ h_{O,k}$ se traitant de la même manière).

s est une similitude directe d'angle α et de rapport k.

Quel est son centre Ω ?

Notons $s(A) = h_{O,k}(A) = B$

et $I = r_{A,\alpha}^{-1}(O)$ de sorte que $s(I) = h_{O,k}(O) = O$.



On a $\begin{cases} s(A) = B \\ s(I) = O \end{cases}$ et s est une similitude directe,

donc conserve les angles : $\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}} = \widehat{\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega O}} = \widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BO}}$

d'où, en termes d'angles de droites : $\widehat{\Omega I, \Omega O} = \widehat{AI, AO} \Leftrightarrow \Omega \in \mathcal{C}_{IAO}$

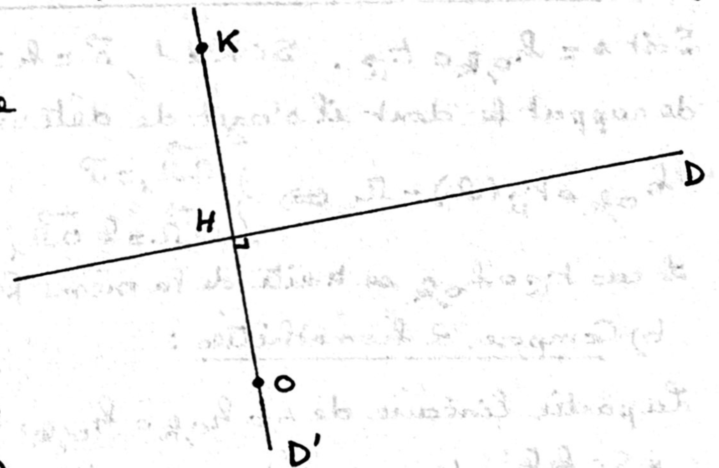
(on suppose $\alpha \neq 0$ ou π $[2\pi]$ sinon $r_{A,\alpha}$ est une homothétie et on est ramenés au b). Comme $\alpha \neq 0$ ou π, I, A, O ne sont pas alignés)

De plus $\widehat{\Omega A, \Omega B} = \widehat{IA, AB} \Leftrightarrow \Omega$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et admettant (IA) pour tangente en A.

Ainsi $\Omega \in \mathcal{C}_{IAO} \cap \mathcal{C}$. Ω est le point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{IAO}$ et $\mathcal{C}$ distinct de A puisque A n'est pas invariant par s.

d) <u>Composer une homothétie de rapport $k>0$ et une symétrie orth. / à une droite</u> :

$s = h_{O,k} \circ s_D$ est une similitude indirecte de rapport k, de centre Ω et de base Δ à déterminer.



Si $O \in D$, $s = h_{O,k} \circ s_D$ est l'écriture canonique de s donc $\Omega = O$ et $\Delta = D$.

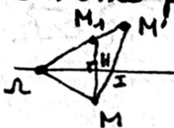
Supposons donc que $O \notin D$:

La partie linéaire $\vec{s} = k\vec{s_D}$ montre que Δ est parallèle à D.

Soient D' la perpendiculaire à D passant par O et H le projeté orthogonal de O sur D.

$s(H) = h_{O,k}(H) = K$ est facile à construire.

H et $s(H) = K$ se projetteront donc sur le même point de Δ, ce qui entraîne que $\boxed{\Omega \in D'}$ (Raisonner sur la figure



pour prouver que "$s(M)$ et M se projettent sur le même pt de Δ ssi M est sur la perpendiculaire à Δ passant par Ω)

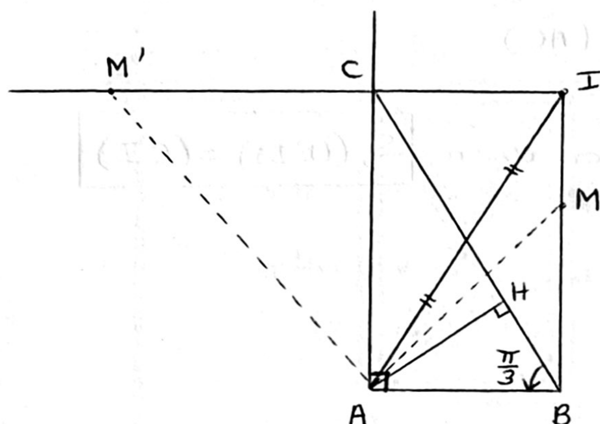
De $s(H) = K$ on déduit alors $h_{\Omega,k}(H) = K \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega K} = k\overrightarrow{\Omega H}$.

Ω est l'un des 2 points N de D' vérifiant $\frac{NK}{NH} = k$. Comme O est l'un de ces points, Ω sera l'autre.

<u>Ccl</u> : Ω est déterminé par $\overrightarrow{\Omega K} = k\overrightarrow{\Omega H}$ et la base Δ de s est la parallèle à D passant par Ω.

BAC **28** PARIS-CRÉTEIL-VERSAILLES AMIENS-LILLE-ROUEN, JUIN 1992 : CE.

*O 4 points



Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3} \text{ modulo } 2\pi.$$

Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1. Soit S_1 la similitude directe de centre A qui transforme H en B.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de S_1.

b) Montrer que $S_1(C) = I$. En déduire l'image de la droite (BC) par S_1.

2. Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

a) Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2.

b) Soient M un point de (BI), M' son image par S_2.
On suppose que M et M' sont distincts de I.
Montrer que les quatre points (A, M, I, M') sont cocycliques.

Programme abordé :
- Similitude plane directe.
- Cocyclicité.

Sol :

[1.a] Le rapport de S_1 est $k_1 = \frac{AB}{AH} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, et son angle $\alpha = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{6}$ (*)

[1.b] $S_1(C) = I$ car :

$$\begin{cases} \frac{AI}{AC} = \frac{1}{\frac{AC}{AI}} = \frac{1}{\sin \widehat{CIA}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = k_1 \quad \text{car } \widehat{CIA} = \widehat{ABC} \\ \text{et} \\ \widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}} = -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi] \end{cases}$$

(ce dernier point se montrant par : $\widehat{\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}} = \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}} = \widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}} \doteq \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

et(*) $\underbrace{\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}}} + \underbrace{\widehat{\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CA}}}_{=\pm\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}}}_{=-\frac{\pi}{3}} = \pi$ $[2\pi]$

$\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}} = \frac{4\pi}{3} \mp \frac{\pi}{2} = \begin{cases} \frac{5\pi}{6} \text{ non aigu, à rejeter} \\ \text{ou} \\ \frac{11\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi] \end{cases}$ (les angles d'un tri. rect. autre que le droit sont aigus))

* On déduit $S_1((BC)) = (IB)$ (car les similitudes conservent l'orthogonalité, donc (BC), perpendiculaire à (AH) en H sera transformée en $S_1((BC))$ perpendiculaire à $S_1((AH)) = (AB)$ en $S_1(H) = B$. Comme $S_1((BC))$ passe par I, on aura $S_1((BC)) = (IB)$)

((*) Voir lemme ci-derrière.)

2.a Les similitudes directes conservent les angles, donc :

$$\left.\begin{array}{l}(BI) \perp (AB) \\ S_2((AB)) = (AC)\end{array}\right\} \Rightarrow S_2((BI)) \perp (AC)$$

Comme $S_2((BI))$ passe par $S_2(B) = C$, on aura $\boxed{S_2((BI)) = (CI)}$

2.b $S_I(M) = M'$ vérifie

$$\begin{cases} \widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}} = \frac{\pi}{2} \\ M' \in (IC) \quad \text{d'après 2.a} \end{cases}$$

<u>donc A appartient au cercle de diamètre $[MM']$, comme I.</u>

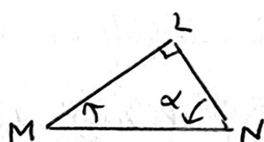
CQFD

<u>Objectifs</u> : Utiliser les propriétés des similitudes directes
Savoir prouver une cocyclicité

<u>Niveau</u> : Difficile - Demande un bon entraînement à ce genre de démonstration

<u>Prolongements</u> :
- Il est inutile de supposer $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$
- Préciser la construction de la figure (qui n'est pas demandée ici)
- Préciser les égalités utilisées concernant les angles de vecteurs, telle (*) ci-dessous :

(*) <u>lemme (utilisé 2 fois dans la dém. ci-dessus)</u>



Si $\widehat{\overrightarrow{NL}, \overrightarrow{NM}} = \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ alors $\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ML}} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $[2\pi]$

preuve : On a (comme dans tout triangle) $\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ML}} + \underbrace{\widehat{\overrightarrow{LM}, \overrightarrow{LN}}}_{=\pm\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\widehat{\overrightarrow{NL}, \overrightarrow{NM}}}_{=\alpha} = \pi$

d'où $\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ML}} = \pi \pm \frac{\pi}{2} - \alpha$ $[2\pi]$

Si $\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ML}} = \pi + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{3\pi}{2} - \alpha$, alors $\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ML}} \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ ce qui est absurde car les angles distincts du droit d'un triangle rectangle sont aigus.

Donc $\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ML}} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $[2\pi]$ CQFD

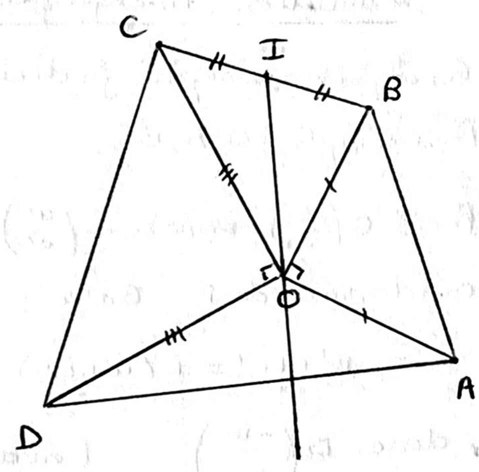
4 outils différents pour l'étude d'une configuration :
PRODUIT SCALAIRE, SIMILITUDE, COORDONNEES, NBRES COMPLEXES.

Dans le plan orienté, OAB et OCD sont rectangles isocèles en O et

$(\vec{OA},\vec{OB}) = (\vec{OC},\vec{OD}) = \frac{\pi}{2}$

On note I le milieu de [BC]

Montrer que $(OI) \perp (AD)$.



(une partie recopiée dans csim0003)

1-solution : Produit scalaire

$\vec{OI}.\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{OB}+\vec{OC}).(\vec{OD}-\vec{OA}) = \frac{1}{2}(\vec{OB}.\vec{OD} - \vec{OA}.\vec{OC})$

Or $\begin{cases} \vec{OB}.\vec{OD} = \|\vec{OB}\|.\|\vec{OD}\| \cos(\vec{OB},\vec{OD}) \\ \vec{OA}.\vec{OC} = \|\vec{OA}\|\,\|\vec{OC}\| \cos(\vec{OA},\vec{OC}) \end{cases}$

On constate que $(\vec{OA},\vec{OC}) = (\vec{OB},\vec{OD})\ [2\pi]$ d'où l'égalité des produits scalaire. CQFD

NB : On a, en effet : $(\vec{OA},\vec{OC}) = (\vec{OA},\vec{OB}) + (\vec{OB},\vec{OC}) = (\vec{OC},\vec{OD}) + (\vec{OB},\vec{OC})$
$= (\vec{OB},\vec{OD})$ puisque $(\vec{OA},\vec{OB}) = (\vec{OC},\vec{OD}) = \frac{\pi}{2}$

2-solution : Similitudes

h = homothétie de centre B et de rapport 2

r = rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

L'application $s = r\circ h$ est une similitude de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Comme

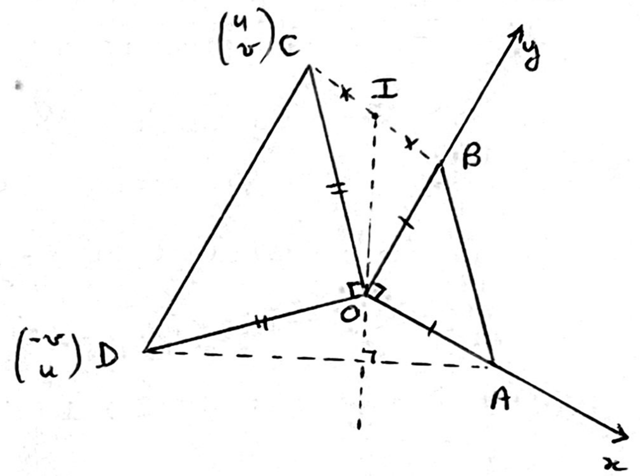
$s(I) = r\circ h(I) = r(C) = D$

$s(O) = r\circ h(O) = r(B') = A$ où B' est le sym. de B /à O

on déduit : $\begin{cases} (OI) \perp (AD) \\ \text{et} \\ AD = 2.OI \end{cases}$ (en prime !)

(réf. Tenacher TCE 92 I p90)

3° solution : Analytique



On choisit un repère judicieux.
Par exemple (O, A, B).

Posons $C\binom{u}{v}$ et notons $\binom{u'}{v'}$ les coordonnées de D. On a :

$$u' + iv' = i(u + iv) = iu - v$$

donc $D\binom{-v}{u}$ (on aurait aussi pu traduire les égalités $OC = OD$, $\vec{OC}.\vec{OD} = 0$ et $\det(\vec{OC}, \vec{OD}) > 0$)

On constate : $\vec{OI}.\vec{AD} = \begin{pmatrix} \frac{u}{2} \\ \frac{v+1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v-1 \\ u \end{pmatrix} = 0$ CQFD

4° solution : Nombres complexes

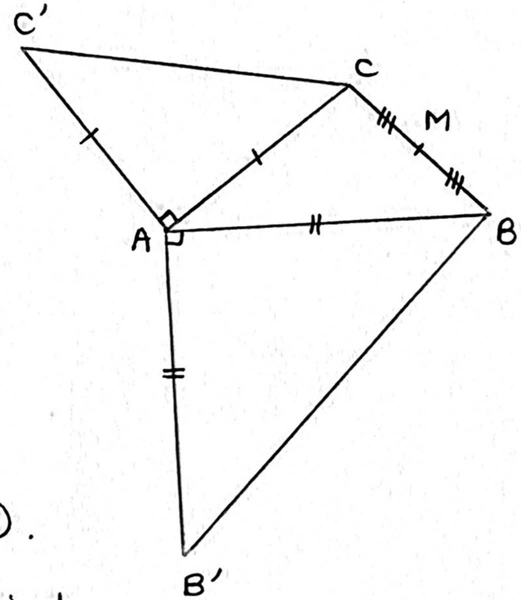
$A(1)$ $B(i)$ $C(c)$ $D(ic)$

$(OI) \perp (AD) \Leftrightarrow \frac{i+c}{2} . (\overline{ic-1}) \in i\mathbb{R}$ ce qui est vrai.

Objectifs : - montrer la diversité des outils qu'il est possible de mettre en œuvre dans la résolution d'un problème.

Contexte : - Il y a possibilité soit de poser le problème sans donner une quelconque indication, et d'observer les réactions des élèves, soit de proposer des indications en créant des questions intermédiaires.

Le but de l'exercice est de montrer que les dtes (AM) et (B'C') sont perpendiculaires et que B'C' = 2. AM.



1) Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2. Déterminez les images des points A et M par h. Trouvez une rotation r telle que $r \circ h$ transforme A en B' et M en C'. Conclure.

2) Utilisation des nombres complexes (2e méthode).
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c.
a) Quelles sont les affixes m, b', c' des points M, B', C' ?
b) Retrouvez alors les résultats annoncés.

(réf. adapté d'un bac C)
(réf. TC Transmath 87 t2, ex46p246)
(idem : Terracher TCE 92 I p 90) ou [5] Pb d'angles et de dist. où l'on voit 4 méthodes

---

1) $h = h_{B,2}$ donc $\begin{cases} h(M) = C \\ h(A) = T \text{ symétrique de } B \text{ /à } A. \end{cases}$

La rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ répond manifestement à la question, ie vérifie :

$$\begin{cases} r(T) = B' \\ r(C) = C' \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} r\circ h(A) = B' \\ r\circ h(M) = C' \end{cases} \quad (*)$$

$r \circ h$ est une similitude directe (comme composée de 2 similitudes directes) d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2, donc (*) donne :

$$\begin{cases} B'C' = 2.AM \\ (B'C') \perp (AM) \end{cases}$$

2) $\begin{cases} m = \frac{b+c}{2} \\ b' = -ib \\ c' = ic \end{cases}$ donc $\begin{cases} AM = |m| = \frac{|b+c|}{2} \\ B'C' = |c'-b'| = |ic-(-ib)| = |c+b| \end{cases} \Rightarrow AM = \frac{B'C'}{2}$

et : $(m-a)\overline{(c'-b')} = \frac{b+c}{2}\,\overline{(ic+ib)} = -i\,\frac{|b+c|^2}{2} \in \mathbb{R}i$

donc $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{B'C'}$ (on a utilisé la caractérisation $\vec{u}(z) \perp \vec{v}(z') \iff z\bar{z}' \in \mathbb{R}i$)